Do redakcyi Biblioteki Warszawskiéj.

Wyczytawszy w Bibliotece Warszawskiéj na miesiąc grudzień 1854, stron. 591, *Kilka słów o obliczaniu miąższości drzewa* przez p. K. Szumlańskiego zamieszczone, i mając właśnie pod ręką zeszyt pisma: „Archiv der Mathematik und Physik 22. Th. S. 343", w którém p. prof. Grunert w téj saméj materyi artykuł pisze; uważałem, iż wzór przez tego ostatniego podany, lubo nie dokładniejszy, wszelako do ułożenia go w tablice daleko jest łatwiejszy. Z tego powodu, tak w interesie sprzedających i kupujących drzewo, jako téż leśniczych, aby im ulżyć zachodu w obliczaniu miąższości sprzedawanego drzewa, pośpieszam z udzieleniem Bibliotece wspomnionego wzoru.

Uważając sztukę drzewa jako ostrokrąg równolegle do podstawy ścięty i nazywając promień w grubszym końcu przez P, a w cieńszym przez p, wysokość zaś tegoż ostrokręgu czyli długość drzewa przez n, a jego miąższość przez O, wiadomo, że bryłowatość takiego ostrokręgu wyraża się przez

$$O = \tfrac{1}{3}\pi n\,(P^2 + p^2 + Pp).$$

Ponieważ $P^2 + p^2 + Pp = (P + p)^2 - Pp$,

tudzież $P^2 + p^2 + Pp = (P - p)^2 + 3Pp$;

zatém $O = \tfrac{1}{3}\pi n[(P + p)^2 - Pp]$

albo $3O = \tfrac{1}{3}\pi n[3(P + p)^2 - 3Pp]$,

tudzież $O = \tfrac{1}{3}\pi n[(P - p)^2 + 3Pp]$.

Zkąd przez dodanie tych dwóch wyrażeń wypada

$$4O = \tfrac{1}{3}\pi n[3(P + p)^2 + (P - p)^2],$$

a nareszcie

$$O = \tfrac{1}{4}\pi n(P + p)^2 + \tfrac{1}{12}\pi n(P - p)^2.$$

Ponieważ

$\pi n(P + p)^2$ = bryłow. walca, którego promień podstawy $= P + p$, a wysok. n,

$\pi n(P - p)^2$ = „ „ „ „ $= P - p$, „ n,

przeto położywszy

$$\pi n(P + p)^2 = W_{P+p},\quad \pi n(P - p)^2 = W_{P-p},$$

otrzymamy Grunerta wyrażenie bryłowatości ostrokręgu ściętego:

$$O = \tfrac{1}{4} W_{P+p} + \tfrac{1}{12} W_{P-p}.$$

Stosując ten wzór do obliczenia miąższości drzewa, widzimy, że tylko potrzeba ułożyć w tablice objętości walców dla różnych podstaw, a reszta już się bez trudności uskutecznia. Ten wzór służyć także może do obrachowania objętości kadzi w browarach używanych, które miewają zwyczajnie kształt ostrokręgów ściętych.

W przypadku który głównie zatrudniał p. Szumlańskiego, sztuka drzewa 24 stóp mająca, dzieli się zwyczajnie na 4 sekcye i każdéj rachuje się miąższość z osobna, a summa wszystkich czterech sekcyj jest miąższością całéj sztuki; dlatego w powyższym wzorze przyjąć można n za stałe $i=6$, $\pi=3{\cdot}1415926$; a że częściéj średnice niż promienie drzewa są podawane, przeto nazywając większą przez S, a mniejszą przez s, mieć będziemy miąższość kloca 6 stóp długości mającego:

$$O=1{\cdot}178097\,(S+s)^2+0{\cdot}392699\,(S-s)^2,$$

jeżeli S+s i S—s są dane w stopach;

zaś $$O=0{\cdot}0081812\,(S+s)^2+0{\cdot}002727\,(S-s)^2,$$

jeżeli S+s i S—s są dane w calach.

Miąższości w obu razach otrzymują się w stopach sześciennych.

Dla każdéj innéj długości kloca, którą oznaczmy przez d, znajdziemy:

$$O=0{\cdot}196349\,d\,(S+s)^2+0{\cdot}06545\,d\,(S-s)^2,$$

jeżeli S+s i S—s są w stopach,

a $$O=0{\cdot}0013635\,d\,(S+s)^2+0{\cdot}000454\,d\,(S-s)^2,$$

jeżeli S+s i S—s są w calach dane.

Według drugiego z powyższych dwóch wzorów rachowana miąższość browarki pod 3, str. 595, przez pana Szumlańskiego obliczona, będzie:

1	sekcya	15·130,
2	—	17·322,
3	—	22·166,
4	—	29·496.

Drugi wyraz jest prawie zawsze bardzo mały, tak, że w podobnych ostatniemu rachunkach zaniedbanym być może. Ważność jego w piérwszéj sekcyi wynosi tylko 0·003, w drugiéj 0·011, w trzeciéj i czwartéj 0·043.

Kraków,
d. 15 stycznia 1855 r.

J. K. S.

Przypis do dwóch poprzednich artykułów o obliczaniu miąższości drzewa.

W artykule, do którego się p. *J. K. S.* odnosi, pisze p. professor Grunert, że podane przez niego dwumianowe wyrażenia bryłowatości ostrokręgu równolegle do podstawy ściętego, które on ze zwyczajnych trójmianowych wyrażeń, oddzielnie dla ostrokręgu kołowego, a oddzielnie znowu dla ostrokręgu elliptycznego wyprowadza, są może już znane, ale z pewnością nie tak powszechnie, jakby na to zasługiwały. Otóż wspomnione dopiéro wyrażenia dwumianowe są już rzeczywiście w pismach dawniejszych, i to pod kształtem do każdego rodzaju podstawy zarówno się stosującym, podane. Jakoż, gdy ostrosłup lub ostrokrąg o jakiejkolwiek podstawie, przetniemy płaszczyzną do jego podstawy równoległą, i w klocu ztąd powstałym będziemy przez L i l rozumieli dwie którekolwiek linie, piérwszą na podstawie większéj, drugą zaś na podstawie mniejszéj, podług podobieństwa tychże podstaw sobie odpowiadające; gdy nadto stosunek powiérzchni podstawy większéj kloca do kwadratu z linii L oznaczymy przez c, wysokość tegoż kloca przez h, a jego bryłowatość przez O; wiadomo, że

$$O = \tfrac{1}{3} ch(L^2 + Ll + l^2), \qquad (1)$$

i że z przyczyny

$$(L+l)^2 = L^2 + 2Ll + l^2,$$
$$(L-l)^2 = L^2 - 2Ll + l^2,$$

a ztąd

$$3(L+l)^2 + (L-l)^2 = 4L^2 + 4Ll + 4l^2,$$

wzór (1) wychodzi na

$$O = \tfrac{1}{4} ch(L+l)^2 + \tfrac{1}{12} ch(L-l)^2. \qquad (2)$$

Gdy w szczególności będzie chodziło o kloc ostrokręgowy, koła za podstawy mający, i gdy przez L i l zechcemy, jak pospolicie, rozumiéć promienie, średnice lub okręgi rzeczonych podstaw, większéj i mniejszéj: natenczas c przywiedzie się odpowiednio do π, $\frac{1}{4}\pi$ lub do $\frac{1}{4\pi}$. Dla ostrokręgu zaś równolegle ściętego, któregoby podstawy były ellipsami, jeżeli przez L i l rozumiemy połówki wielkich lub połówki małych osi tychże ellips; liczba c, podług wiadomego wyrażenia na powiérzchnią ellipsy, przechodzi na liczbę π, pomnożoną, w piérwszym razie przez stosunek półosi małéj do półosi wielkiéj, a w drugim przeciwnie, przez stosunek półosi wielkiéj do półosi małéj, obu w jednéjże którejkolwiek podstawie wziętych.

Wiadomo téż, że wzór (2) jest tylko szczególnym przypadkiem jednego z wyrażeń na objętość bryły, przez niektórych obeliskiem zwanéj; a professor Steiner, w rozprawie swojéj o tego rodzaju bryłach, 1842 r. wydanéj, namienia, że formułę (2). dla kloca ostrokręgowego o podstawach kołowych uszczególnioną, kommunikował mu w r. 1835 p. radca dworu Schweins, jako w praktyce dogodną. O wspomnioném wyrażeniu bryłowatości obelisku pisał też i sam p. professor Grunert, w wydawaném przez siebie *Archiv der Mathematik und Physik*, Theil 9, r. 1847, str. 82—87.

Trudno byłoby zresztą powiedziéć, od jak dawna wzór (2) jest znany; bo już np. Cavalieri, w *Centuria di varii problemi. In Bologna, 1639*, przytacza (*Problema* 73) ze swojéj Geometryi regułę wychodzącą na wzór

$$O = ch[Ll + \tfrac{1}{3}(L-l)^2],$$

a z któréjto reguły wyprowadza następnie inną, do rachunku logarytmami dogodniejszą: oczywiście zaś, na mocy tosamości

$$Ll = \tfrac{1}{4}(L+l)^2 - \tfrac{1}{4}(L-l)^2,$$

przejście od napisanego tu wyrażenia na O, do wzoru (2), samo się prawie nastręcza. Dodajmy, że w wykładzie elementarnym nauki o wyznaczaniu bryłowatości ciał, wyprowadzanie wzoru (2) ze wzoru (1) możnaby uważać tylko wtenczas za stosowne, gdy się dowód wzoru (1), w części odnoszącéj się do kloca ostrosłupowego o podstawach trójkątnych, wyłożyło algebraicznie; na drodze albowiem geometrycznéj, wzór (2) daje się dowieść wprost z tą samą łatwością, co i wzór (1)

Ściągając wzór 2) w szczególności do ostrokręgu ściętego o podstawach kołowych, i rozumiejąc przez L i l średnice lub obwody tychże podstaw, widzimy, że chcąc za pomocą zwyczajnéj tablicy bryłowatości walców kołowych, wysokość walca i średnicę lub obwód jego podstawy za argumenta mającéj, znaléźć summę bryłowatości ilukolwiek ostrokręgów ściętych, gdy wysokość każdego z nich i średnice lub obwody jego podstaw będą w liczbach dane, trzeba (pomijam tu wysłowienie dwóch innych sposobów postępowania) do summy bryłowatości walców odpowiadających w tablicy argumentom h i $\frac{L+l}{2}$, dodać $\frac{1}{3}$ summy bryłowatości walców odpowiadających argumentom h i $\frac{L-l}{2}$.

Łatwo się zaś samemu domyśléć, z jakichby dwóch części trzeba miéć złożoną tablicę, aby obliczenie bryłowatości ostrokręgu ściętego o podstawach równoległych a kołowych sprowadzało się, podług wzoru (2), do dodania do siebie dwóch liczb, z téjże tablicy wypisać się mających. Zwykle jednak tablice bryłowatości ostrokręgów ściętych mają za argumenta l, L i h, rozu-

mając przez l i L średnice lub obwody podstaw równoległych a kołowych; czyli, są ułożone tak, iż wchodząc z wiadomemi l, L i h do tablicy, znajdujemy w niéj, w ogólności bezpośrednio, bryłowatość żądaną: argumentom $l=L$, h, odpowiada walec; argumentom zaś $l=0$, L i h, odpowiada ostrokrąg cały.

Zdaniem p. professora Grunert, najdokładniejszy sposób wyznaczenia miąższości kloca drzewa nieobrobionego zależy na podzieleniu tegoż kloca na ostrokręgi ścięte; a którzy są tego zdania, obliczają rzeczoną miąższość zapomocą tablicy bryłowatości ostrokręgów ściętych. König zaś, w dziele: *Die Forst-Mathematik. Zweite stark vermehrte Ausgabe. Gotha*, 1842, pisze, że ostrokrąg ścięty nie obejmuje sobą pękatości kloca drzewa nieobrobionego; i że, byleby sekcye, podług rodzaju kloca, były dostatecznie krótkie, i punkta kończenia się sekcyi jednéj a zaczynania się następnéj stosownie poobiérane, zgodniéj jest z doświadczeniem i łatwiéj, uważać każdą sekcyą jako równoważną walcowi téj saméj długości, a któryby za podstawę miał przecięcie téjże sekcyi do jéj długości prostopadłe, w ogóle przez środek téjże długości poprowadzone, a w szczególnych przypadkach przez punkt, raczéj podług wprawnego okomiaru, niż podług pewnych stałych prawideł wyznaczyć się dający. Przerzeczonego dopiéro przecięcia sekcyi środkowego nie bierze König za jedno z kołem, średnią arytmetyczną między średnicami podstaw sekcyi za średnicę mającém. Podaje i on prawidło na bryłowatość ostrokręgu kołowego równolegle ściętego, wzorem (2) wskazane; ale do obliczania miąższości sekcyj kloca drzewa nieobrobionego, tegoż prawidła nie używa: pomiędzy tablicami dla leśniczych posiłkowemi, nie podaje on tablicy bryłowatości ostrokręgów ściętych, lecz tylko tablice bryłowatości walców (*).

(*) Dla okazania, że miąższości kloców drzewa nieobrobionego długich i znacznie różnéj grubości końce mających, nie można wymierzać bez podzielenia tychże kloców na sekcye, bierze König za przykład, kloc dębiny 60 stóp długi, w grubszym końcu 40 cali, a w cieńszym 4 cale średnicy mający. Gdybyśmy, mówi, całą niniejszą sztukę drzewa uważali za walec téj saméj z nią długości, a średnicy zrównanéj $\frac{40+4}{2}=22$ cale; wypadłoby na miąższość całéj sztuki tylko 158,4 stóp sześciennych. Lecz, jeżeliby ta sztuka, jak się to nierzadko przytrafia, miała w swym środku 32 cale średnicy; sama część téj sztuki od grubszego końca do środka się rozciągająca, uważana także za walec jednako z tą częścią czyli 30 stóp długi, a ze średnicy zrównanéj $\frac{40+32}{2}=36$ cali, miałaby 212 stóp sześciennych miąższości, a zatém daleko więcéj, niż cała sztuka. To bryłomiernicze partactwo (mówi daléj autor), przychodom z lasów tak wielki uszczerbek przynoszące, po większéj części się jeszcze, ku cichéj radości kupujących, dotąd praktykuje. W niniejszym przykładzie König'a, biorąc, raz całą sztukę, drugi raz grubszą jéj połowę, za ostrokrąg ścięty, znaleźlibyśmy na całość 193,7, a na grubszą połowę 212,9 stóp sześciennych: liczby jeszcze z sobą sprzeczne, ale już mniéj, niż w poprzednim rachunku, od siebie się różniące.

Uważając sekcyą kloca drzewa nieobrobionego, raz jako równoważną ostrokręgowi ściętemu, drugi raz znowu jako równoważną walcowi z jéj przecięcia środkowego, rzeczywiście wymierzonego, tę samę długość z sekcyą mającym, podstawiamy za tęż sekcyą dwie bryły w ogólności nierównoważne sobie, a z którychto dwóch brył, według kształtu sekcyi, raz ostrokrąg od walca, drugi raz znowu przeciwnie, walec od ostrokręgu może być większy. Biorąc w szczególności przecięcia kloca za koła, i licząc jego sekcye porządkiem od jednego do drugiego końca tegoż kloca, niech s_{2r-2}, s_{2r} będą średnice przecięć, jego $r^{tą}$ sekcyą ograniczających; s_{2r-1} średnica przecięcia środkowego téjże sekcyi, rzeczywiście wymierzona; σ_{2r-1} średnica walca, mającego tę samę długość z przerzeczoną dopiéro sekcyą, a równoważnego ostrokręgowi ściętemu, końcowe przecięcia téjże sekcyi za podstawy mającemu. Niech daléj H będzie długość całego kloca; n liczba składających go sekcyj; K miąższość tegoż kloca wypadająca z uważania wszystkich jego sekcyj za ostrokręgi ścięte; K' miąższość tegoż samego kloca, wypadająca z uważania każdéj jego sekcyi za walec téj saméj z nią długości, a rzeczywiście wymierzone środkowe przecięcie téjże sekcyi za podstawę mający. Jeżeli przytém średnice są wyrażone w calach, a H, K i K' w stopach; różnica $K—K'$ będzie równa liczbie $\frac{H\pi}{4\times144}$, pomnożonéj przez pewną ilość większą od najmniejszéj a mniejszą od największéj z tych wszystkich ilości, którebyśmy otrzymali kładąc w różnicy $\sigma^2_{2r-1} - s^2_{2r-1}$ za r po kolei 1, 2, 3,..., n. Albo też to samo inaczéj wyrażając: różnica $K—K'$ będzie równa liczbie $\frac{H\pi}{48\times144}$, pomnożonéj przez pewną ilość przypadającą między najmniejszą a największą z tych wszystkich ilości, którebyśmy otrzymali podstawiając w wyrażeniu

$$(s_{2r}-s_{2r-2})^2+3(s_{2r-2}+s_{2r}+2s_{2r-1})(s_{2r-2}+s_{2r}-2s_{2r-1})$$

za r po kolei 1, 2, 3,..., n. Możnaby też powiedzieć, że jeżeli sekcye kloca są wszystkie jednakiéj długości, i jeżeli postępując od jego cieńszego końca ku grubszemu, największą z pomiędzy różnic

$$s_1-s_0,\ s_2-s_1,\ s_3-s_2,\ \ldots\ldots,\ s_{2n}-s_{2n-1},$$

oznaczymy przez δ; różnica $K—K'$, bez względu na jéj znak wzięta, będzie zawsze mniejsza od

$$\frac{H\pi}{288}\left[\left\{s_0+(n+\tfrac{1}{2})\delta\right\}\delta-\frac{1}{4n}(s^2_{2n}-s^2_0)\right].$$

Sama atoli znaczna ilość przykładów w praktyce, raz przez ostrokręgi ścięte, drugi raz znowu przez walce z każdego środkowego przecięcia, sekcyami obliczonych, mogłaby dopiéro okazać, czy przy różnicy δ nieprzechodzącéj np. jednego cala, różnicę K—K' można na każdym klocu drzewa zosobna, lub przynajmniéj (dlatego, że ona wypada, raz dodatną, drugi raz odjemną,) na massie kloców zaniedbywać. W browarkach, które p. Szumlański pod *a)*, *b)* i 3, str. 595, przez ostrokręgi ścięte obliczył, gdyby średnica przecięcia środkowego każdéj z pomiędzy cztérech sekcyj, po sześć stóp długości mających, była dana, różnica K—K' okazałaby się zapewne mało znaczącą. Sekcye zaś po dwanaście stóp długości mające, są zadługie na to, aby je można uważać za ostrokręgi ścięte, lub za walce téj saméj z niemi długości, a którychby podstawami były środkowe przecięcia tychże sekcyj; dałyby jednak, na miąższość trzech przerzeczonych browarek, w piérwszém przypuszczeniu: 31,024, 44,942, 84,845; a w drugiém, odpowiednio: 29,125, 48,433, 82,990.

Jeżeli we wzorze ogólnym (2), dla kloca ostrokręgowego o podstawach kołowych uszczególnionym, zamiast różnicy L—l podstawimy wartość hypotetyczną $\frac{h}{40+h}(L+l)$, będziemy, jak to uważa professor P a u c k e r, mieli formułę, podług któréj, z wiadomych h i $L+l$, rozumiejąc przez L i l średnice podstaw, obliczone są tablice Henryka C o t t a *(Tafeln zur Bestimmung des Inhalts der runden Hölzer)*, w wydaniu ich 3ém z r. 1838. Wypadki przerzeczonych dopiéro tablic są od liczb, którebyśmy przy tych samych wysokościach i tych samych summach średnic, dając sobie jeszcze różnicę tychże średnic, ze wzoru ścisłego (2) dla O otrzymywali, częstokroć znacznie, raz mniejsze, drugi raz większe. Nie wiém atoli, jak się ma rzecz z edycyą tych tablic siódmą, poprawioną, którą August C o t t a 1854 r. ogłosił.

Namienię tu jeszcze, że przybliżona miąższośc kloców drzewa nieobrobionego dałaby się téż obliczać przez wzory, w tak zwanéj kwadraturze mechanicznéj podawane, lub z nich złożone; namienię zaś nie dlatego, abym najprostsze z tych wzorów koniecznie do używania proponował, ale żem się chciał dowiedzieć, o ileby wypadki, za pomocą przerzeczonych dopiéro wzorów, a z téj saméj liczby i tychże samych przecięć otrzymane, różniły się od wypadków otrzymanych przez uważanie sekcyj kloca za ostrokręgi ścięte.

W klocu drzewa nieobrobionego, płaszczyznami do jego długości prostopadłemi na sekcye podzielonym, możnaby każdą sekcyą, któréjby przecięcia podłużne nie były na zewnątrz wklęsłe, z tém większém przybliżeniem, im ona krótsza, uważać np. jako równoważną połowie summy dwóch walców jednakiéj z tą sekcyą długości, a przecięcia poprzeczne, téż sekcyą ograniczające, za podstawy mających. Otrzymana tym sposobem miąższość sekcyi o podstawach nierównoważnych, będzie zawsze większa,

niż gdybyśmy tęż samę sekcyą uważali za ostrokrąg ścięty; ale też ostrokręgi ścięte nie obejmują sobą nabrzmiałości sekcyj pękatych.

Możnaby też każdą sekcyą, z tém większém przybliżeniem, im będzie krótsza, uważać za tę z pomiędzy brył, dwiema od siebie równoległemi płaszczyznami jako podstawami zakończonych, któréj objętość jest ściśle równa szóstéj części iloczynu z wysokości przez summę obu podstaw i cztéry razy wziętego przecięcia środkowego, tojest w równéj odległości od podstaw i równolegle do nich poprowadzonego; a względem którejto bryły B, odcinek np. ellipsoidy, kuli, obelisk, a tém bardziéj ostrokrąg ścięty i walec, są tylko szczególnemi przypadkami (*). Jeżeli sekcye, na któreśmy kloc cały podzielili, są wszystkie równéj długości, jakąbykolwiek była liczba n tych sekcyj, i jeżeli każdą z tychże sekcyj uważać będziemy za bryłę B dopiéro opisaną; powstanie ztąd, na obliczenie przybliżonéj bryłowatości całego kloca, wzór zwany prawidłem S i m p s o n'a lub C h a p m a n'a. Tojest: jeżeli w klocu drzewa nieobrobionego, dwiema równoległemi płaszczyznami poprzecznie ściętym, odległość H tych dwóch płaszczyzn końcowych od siebie podzielimy na $2n$ części równych, a przez punkta podziału poprowadzimy płaszczyzny do końcowych równoległe, i powierzchnie przecięć kloca, wszystkiemi temi płaszczyznami zrobionych, idąc od jednego do drugiego końca, oznaczymy porządkiem przez

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{2n};$$

bryłowatość tego kloca, z tém większém przybliżeniem do prawdy, im liczba n będzie większą, wyrazi się przez

$$\frac{H}{6n}(P_0+4P_1+2P_2+4P_3+2P_4+\ldots+2P_{2n-2}+4P_{2n-1}+P_{2n}). \quad (3)$$

(*) Gdy powierzchnie podstaw niniejszéj bryły B oznaczymy przez P_0 i P_2, powierzchnią jéj środkowego przecięcia przez P_1, a wysokość przez h, i położymy

$$P_0+P_2-2P_1=2p_1;$$

objętość téj bryły, jako równa

$$\frac{1}{6}h(P_0+4P_1+P_2),$$

wyrazi się jeszcze przez

$$h(P_1+\frac{1}{3}p_1)=h\left(\frac{P_0+P_2}{2}-\frac{2}{3}p_1\right):$$

gdzie p_1 może być ilością dodatną, odjemną, lub zero. Jeżeli podstawy i środkowe przecięcie niniejszéj bryły B są kołami; bryła ta jest od zbioru dwóch ostrokręgów ściętych, te same z nią dwie skrajne podstawy, a środkowe jéj przecięcie za podstawę spólną mających, większa, temuż zbiorowi równoważna, lub od niego mniejsza, stosownie do tego, jak podwojona średnica przecięcia środkowego bryły B jest większa od summy średnic obu podstaw rzeczonéj bryły, téjże summie równa, lub od niéj mniejsza. Toż mówić o porównaniu bryły B z ostrokręgiem ściętym, spólne z nią podstawy mającym.

W praktyce, gdzie przecięcia uważają się za koła, których średnice lub obwody są dane w calach, i gdzie długość H jest dana w stopach, a szukamy bryłowatości w stopach sześciennych, wzór (3) dałby się dosyć łatwo obliczać, używając tablicy kwadratów, połączonéj z tablicą logarytmów. Łatwiéj jednak byłoby obliczać tenże wzór za pomocą zwyczajnéj tablicy walców; i nie masz tu potrzeby wyszczególniać, kiedyby za pomocą przerzeczonéj dopiéro tablicy walców, lub téż po ułożeniu sobie tablicy, pewne części tychże walców bezpośrednio dającéj, obliczanie miąższości kloca drzewa, sekcyami za bryły B uważanemi, lub też od razu podług wzoru (3), sprowadzało się do samego tylko dodawania.

Podług prawidła na kwadraturę mechaniczną ze cztérech rzędnych równo od siebie oddalonych, odcinek uważanego tu kloca drzewa, między przecięciami P_0 i P_3 zawarty, miałby, z przybliżeniem do prawdy tém większém, imby był krótszy, za wyrażenie swéj bryłowatości

$$\frac{h}{8}(P_0 + 3P_1 + 3P_2 + P_3): \qquad (4)$$

gdzie h oznacza odległość przecięć P_0 i P_3 od siebie.

Według wzoru zaś na kwadraturę mechaniczną z pięciu rzędnych równo od siebie oddalonych, przybliżona bryłowatość tego samego kloca, do któregoby się odnosił wzór (3) w założeniu $n=2$, byłaby

$$\frac{H}{90}(7P_0 + 32P_1 + 12P_2 + 32P_3 + 7P_4). \qquad (5) \quad (*).$$

(*) Aby znaléźć objętość jakowéj bryły danéj, wyprowadźmy z jednegoż punktu dwie linie proste do siebie prostopadłe, które weźmy za osi spółrzędnych x, y; i niech a oznacza jakąkolwiek długość daną. Niech daléj płaszczyzna, do osi odciętych x zawsze prostopadła, począwszy od swego spotkania się z bryłą w jednym końcu, posuwa się ciągle, aż przyjdzie do drugiego końca téjże bryły. W każdém położeniu téj płaszczyzny ruchoméj, na jéj przecięciu się z płaszczyzną stałą spółrzędnych xy odetniéjmy rzędną taką, aby prostokąt z przerzeczonéj dopiéro rzędnéj i z linii a był równoważny powiérzchni téj figury, podług któréj wspomniona płaszczyzna ruchoma, w niniejszém swojém położeniu, bryłę przecina. Linia krywa, na któréj wiérzchołki tych wszystkich rzędnych przypadają, oś odciętych, i dwie rzędne skrajne, końcom bryły danéj odpowiadające, zamkną sobą odcinek płaski, którego powiérzchnia A, pomnożona przez długość a, będzie żądaną objętością bryły danéj. Tym sposobem, dochodzenie objętości bryły sprowadza się do kwadratury.

Niech $f(x)$, gdzie f jest znakiem funkcyi, wyraża powiérzchnią téj figury, podług któréj wspomniona płaszczyzna ruchoma przecina bryłę, znajdując się w odległości x od początku spółrzędnych. Linia krzywa, o któréj się powyżéj mówiło, będzie miała za równanie

$$y = \frac{1}{a} f(x). \qquad (\alpha)$$

W trzech browarkach *a)*, *b)*, 3), powyżéj przytoczonych, kwtórych średnice przecięć równo od siebie oddalonych są:

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
a)	9″	11″	15″	18″	21″
b)	12	16	19	22	23
3)	21	22	24	28	32 ,

Niech x_0, X będą odcięte tych dwóch punktów, w których przerzeczona płaszczyzna ruchoma przecina oś odciętych, zaczynając i przestając przecinać bryłę. Nie znając natury funkcyi $f(x)$, czyli, nie znając prawa zwężania się bryły, lub gdy to prawo jest zawiłe, a chcąc z wiadomych n rzędnych wspomnionéj linii krzywéj, w obrębie od $x = x_0$ do $x = X$ przypadających, tudzież z wiadoméj odległości $X - x_0$ rzędnych skrajnych od siebie, znaléźć przynajmniéj przybliżoną wartość powiérzchni A, podstawiamy w miejsce rzeczonéj linii krzywéj, inną linią krzywą, mającą za równanie

$$y = \frac{1}{a} \varphi(x), \qquad (\alpha')$$

w którém $\varphi(x)$ jest funkcyą zmiennéj x wymierną i całkowitą stopnia n—1, udeterminowaną tak, aby i ta druga linia krzywa przechodziła także przez wiérzchołki owych n rzędnych danych. Wynajdujemy potém powiérzchnią A' odcinka na płaszczyznie xy, osią odciętych, tą drugą linią krzywą, tudzież dwiema jéj rzędnemi, odciętym $x = x_0$ i $x = X$ odpowiadającemi, ograniczonego, i bierzemy tak znalezioną powiérzchnią A' za przybliżoną wartość powiérzchni A. Za wspomnione rzędne, w liczbie n, których wiérzchołki mają być obu liniom krzywym (α) i (α') spólnemi, biorą się pospolicie rzędne równo od siebie oddalone, licząc w to i rzędne skrajne, do odciętych $x = x_0$ i $x = X$ należące. Opisany zaś dopiéro sposób wynajdowania przybliżonéj wartości na powiérzchnią A, nazywa się mechaniczną kwadraturą téj linii krzywéj, którą wyraża równanie (α); a względem założonéj bryły, mógłby się nazywać mechaniczném wymierzaniem jéj objętości, lub mechaniczném sześcianowaniem.

Stosując to mechaniczne wymierzanie bryłowatości do sekcyi kloca drzewa nieobrobionego, płaszczyznami do jego długości prostopadłemi poprzecinanego, i dając sobie tylko obie podstawy téjże sekcyi, czyli dwa tylko przecięcia, tęż sekcyą ograniczające, otrzymujemy, na przybliżoną równoważność założonéj sekcyi, walec téj saméj z sekcyą długości, a połowę summy podstaw téjże sekcyi za podstawę mający. Gdy prócz obu przecięć, sekcyą zakończających, dajemy sobie jeszcze i jéj przecięcie środkowe, wypada, że w przybliżeniu, trzeba tęż sekcyą uważać za bryłę B, powyżéj opisaną. Dając sobie zaś cztéry lub pięć przecięć kloca równo od siebie oddalonych, licząc w to i oba przecięcia kloc zakończające, znajdujemy, na przybliżoną bryłowatość tegoż kloca, odpowiednio wyrażenie (4) lub (5).

Jest jeszcze inny sposób mechanicznego wymierzania bryłowatości, w którym, chcąc z wiadoméj długości bryły danéj, tudzież z wiadomych n przecięć téjże bryły, do jéj długości prostopadłych, wyrachować przybliżoną rzeczonéj bryły objętość, bierzemy po temu, nie przecięcia równo od siebie oddalone, ale przecięcia tak rozstawione, aby wypadek na objętość był bliższym prawdy, niż przy téj saméj liczbie innych przecięć danych. Zastosowanie jednak tego sposobu do browarek, pod względem odmierzania odstępów, w których się przecięcia prowadzić mają, a w ogólności i pod względem mnożników tychże przecięć, byłoby trudniejsze.

a odległość przecięć skrajnych od siebie wynosi 24′, i gdzie się przez cztéry sekcye po 6 stóp długości mające, a brane za ostrokręgi ścięte, przychodzi do miąższości:

30,260, 46,851, 84,114,

uważanie każdéj z tych sekcyj za połowę summy dwóch walców, dałoby odpowiednio

30,467, 47,042, 84,316;

ze złożenia zaś piérwszéj sekcyi z drugą, a trzeciéj z czwartą i uważania sekcyj tak złożonych za bryły B, lub téż wprost ze wzoru (3) w założeniu $n=2$, wypadłoby

30,020, 47,506, 83.874;

a wzór (5) dałby

29,953, 47,594, 83,984.

Jeżeli zaś, zaczynając raz od cieńszego, drugi raz od grubszego końca każdéj ze trzech niniejszych browarek, będziemy zbiór trzech piérwszych jéj sekcyj sześciostopowych uważali jako bryłę mającą za objętość wyrażenie (4), a pozostałą sekcyą czwartą uważać będziemy jako ostrokrąg ścięty; wypadnie w piérwszym razie:

30,176, 47,028, 83,554;

a w drugim:

30,392, 47,200, 83,705.

Te sześciorakie dla każdego kloca wypadki są ze średniemi z nich wziętemi

30,211, 47,204, 83,925,

jak na pięć przecięć po sześć stóp od siebie odległych, i gdzie się różnica średnic po sobie następujących zmienia od 2 lub 1 do 4ch cali, dosyć zgodne. Większa liczba przecięć doprowadziłaby naturalnie do wypadków bardziéj z sobą zgodnych, z którychby się téż dopiéro z przybliżeniem wnieść dało, o ile sameż powyższe średnie są do prawdy zbliżone. Wiadomo zresztą, że nie dosyć, aby średnice przecięć były w samych tylko całkowitych calach podawane.

Artykuł pana *J. K. S.* miałem sobie w rękopismie kommunikowany.

W lutym 1855.

A. Frączkiewicz.

Biblioteka Warszawska z m. czerwca 1855 r.

Wolno drukować.
Warszawa, d. 8 (20) kwietnia 1855 r.
J. Papłoński.